



Chapitre 8

Les treillis

Illustration au recto :

Projet de passerelle mixte bois/acier sur l'Ourthe à La Roche en Ardennes, Belgique.
Maître d'œuvre Francy Simon, La Roche en Ardenne, Belgique, 2004.

1. QU'EST-CE QU'UN TREILLIS ?

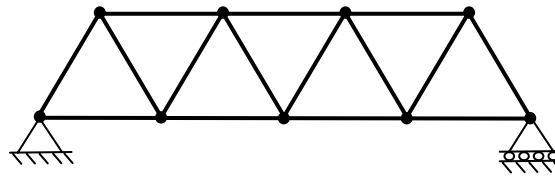
Un treillis se définit à la fois par ses caractéristiques géométriques et par son type de chargement :

- les fibres moyennes des barres concourent en un même point, matérialisé par un nœud;
- chaque nœud est une rotule parfaite : on parle de nœud *articulé* ou *rotulé*, par opposition au nœud *rigide*;
- les efforts sont appliqués aux nœuds et jamais sur les barres elles-mêmes (dans la mesure où le poids propre des barres est négligé).

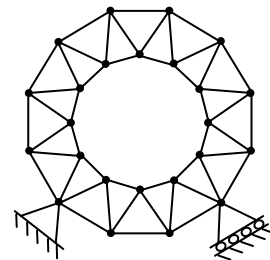
Nous verrons au §3 que la deuxième propriété est à nuancer en fonction de certaines considérations pratiques.

Il existe trois grandes catégories de treillis plans : le treillis simple, le treillis composé et le treillis formé de barres qui se chevauchent.

► Le treillis simple est formé uniquement de mailles triangulaires

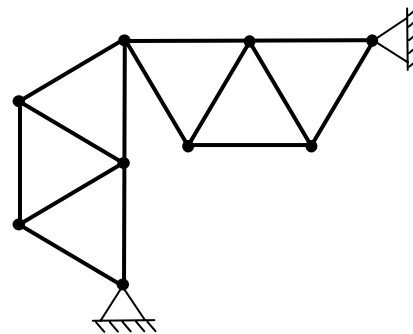


Si le nombre de réactions d'appui ne dépasse pas trois, ce type de treillis est le plus souvent **isostatique**. Il existe toutefois des exceptions comme le montre la figure ci-contre : il s'agit d'un treillis simple qui se referme sur lui-même et dont le degré d'hyperstaticité interne est égal à 3.

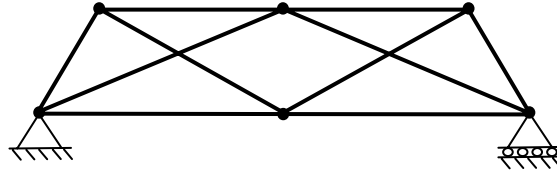


► Le treillis composé résulte de l'assemblage de treillis simples

Un tel treillis peut être isostatique (c'est le cas du treillis ci-contre) ou hyperstatique.

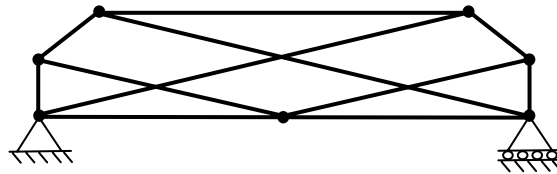


► Le treillis formé de barres qui se chevauchent sans être reliées physiquement



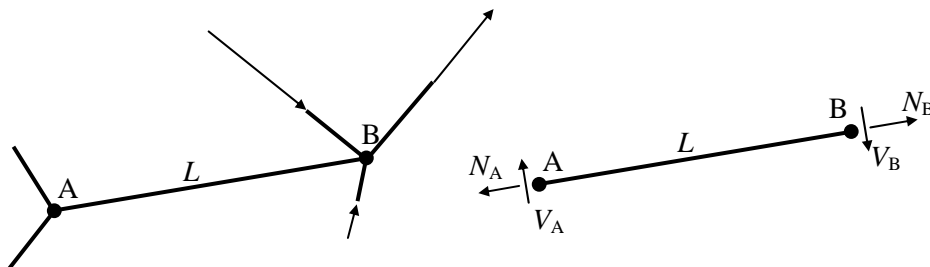
Un tel treillis peut être isostatique ou hyperstatique : dans le cas ci-dessus il est hyperstatique de degré 1.

Le treillis ci-dessous, par contre, est isostatique. Il est toutefois qualifié de *complexe* car il ne peut être analysé ni par la méthode de Cremona ni par la méthode des sections (décrites toutes deux au §5). Seule une méthode matricielle lui est applicable.



2. EFFORTS ET DÉFORMATIONS DANS LES TREILLIS

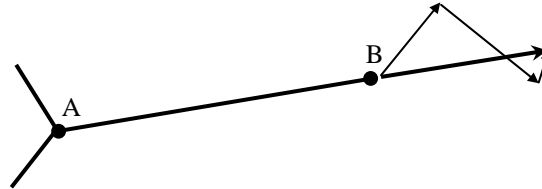
Une caractéristique essentielle des treillis est l'absence de moments fléchissants et a fortiori d'efforts tranchants dans les barres. Pour le démontrer, considérons une barre AB au sein d'un treillis :



Équations d'équilibre de la barre :

$$\begin{cases} V_A = V_B \\ N_A = N_B \\ V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = V_B = 0 \\ N_A = N_B \end{cases}$$

L'effet des barres voisines sur la barre AB peut être modélisé par 4 composantes N_A, N_B (selon l'axe de la barre) et V_A, V_B (perpendiculaires à la barre). Si on écrit les équations d'équilibre de cette barre, il apparaît que l'effort tranchant est nul ($V_A=V_B=0$) et que l'effort normal dans la barre est constant. La résultante des efforts exercés par les autres barres sur chacune des extrémités A et B est donc alignée avec la barre et aucun moment fléchissant ne peut y régner :



Dans une structure quelconque soumise à tous les types d'efforts, on sait que les déformations de flexion ($\int Mm/EI dl$) sont nettement plus importantes que celles de traction/compression ($\int Nn/EA dl$) et d'effort tranchant ($\int Vv/GA_v dl$) (voir chapitre 1 : §9 et exemple 2 du §16). Les treillis étant essentiellement soumis à des efforts normaux, la propriété précédente doit cependant être nuancée : l'expression du déplacement d'un point d'un treillis résultant du théorème de la force unité (chap.1, §9) ne comporte au contraire plus que le terme provenant de l'effort normal. L'intégrale est en outre remplacée par une somme puisque cet effort normal est invariable au sein d'une même barre :

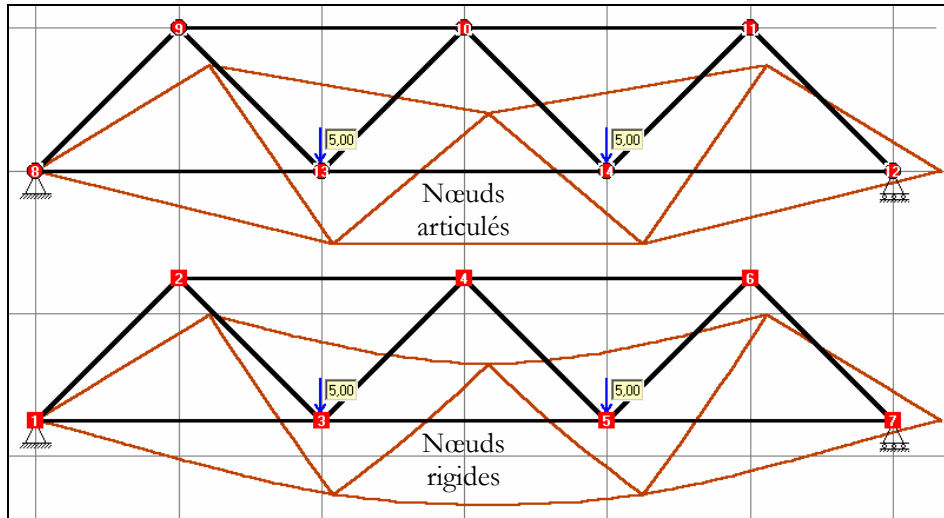
$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dl + \int \frac{Nn}{EA} dl + \int \frac{Vv}{GA_v} dl \quad \text{devient} \quad \delta = \sum_{i=1}^{\text{Nbre de barres}} \frac{N_i n_i}{E_i A_i} L_i$$

3. PEUT-ON SE PASSER DES ARTICULATIONS NODALES ?

Il est légitime de penser que les articulations des treillis doivent poser certains problèmes de conception et de construction. C'est en effet pour cette raison que la plupart d'entre eux sont construits avec des nœuds rigides, par exemple soudés ou boulonnés.

Si les nœuds sont rigides, des contraintes de flexion apparaissent, du fait même que les barres ne peuvent pas tourner librement autour de leurs extrémités respectives et qu'elles doivent donc fléchir pour suivre le déplacement des nœuds. Le treillis se comporte alors comme un cadre rigide (*treillis à nœuds rigides*). La figure ci-dessous illustre cet effet : elle compare les déformées (à une échelle amplifiée) d'un même

treillis, dans deux situations où les nœuds sont articulés d'une part (au-dessus) et rigides d'autre part (en dessous) :



Ces contraintes parasites de flexion sont souvent limitées à quelques pour-cent de la "contrainte admissible" du matériau utilisé et sont influencées par différents facteurs comme la charge totale, la limite d'élasticité, la portée du treillis et le type des sections¹.

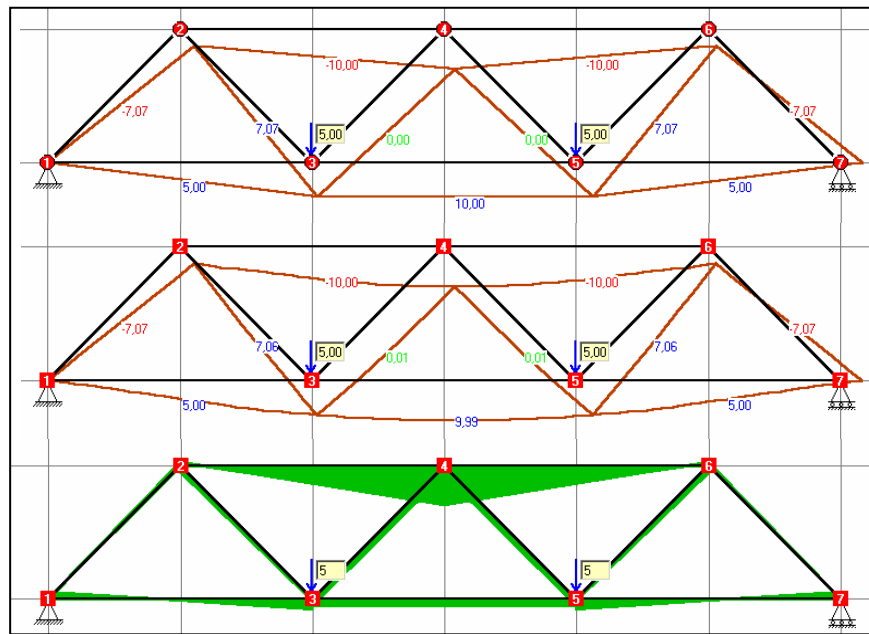
Remarquons toutefois que si l'on combine ces facteurs de manière défavorable, il se peut que l'une des barres au moins d'un treillis à nœuds rigides soit le siège de contraintes parasites de flexion dépassant largement les quelques pour-cent annoncés.

L'exemple numérique détaillé ci-après illustre ce phénomène.

Notons cependant dès à présent que *la présence ou non de rotules aux nœuds ne modifie quasiment pas la valeur des efforts normaux et des déplacements des nœuds.*

Les figures ci-dessous concernent un treillis de 6 [m] de portée et 1 [m] de hauteur, soumis à une charge de 5 [kN] sur chaque nœud de la membrure inférieure. Les barres en compression (effort noté en rouge) sont tubulaires de diamètre 30 [mm] et d'épaisseur 3 [mm], tandis que les barres en traction (effort noté en en bleu) sont circulaires pleines de diamètre 10 [mm].

¹ Pour davantage d'information à ce sujet, consulter : "The determination of stresses due to bending in trusses composed of fixed nodes loaded on their nodes : study of the influence of buckling". Actes du congrès international de l'IASS de septembre 1999 à Madrid. P. Latteur et P. Samyn.



La première figure représente la déformée (avec affichage des efforts normaux) calculée par le logiciel ISSD lorsque tous les nœuds sont articulés.

La deuxième figure représente la déformée (avec affichage des efforts normaux) de ce même treillis lorsque tous les nœuds sont rigides. On voit que la valeur des efforts normaux est quasiment inchangée.

La dernière figure montre les contraintes parasites de flexion qui règnent dans ce treillis lorsque les nœuds sont rigides. Dans ce cas précis, les contraintes parasites de flexion valent 6 [MPa] dans la barre 2-4, soit 15% de la contrainte de compression qui y règne (39 [MPa]), ce qui est important.

En résumé, si les nœuds sont rigides plutôt qu'articulés,

- les efforts normaux sont quasi identiques;
- l'allure de la déformée est différente, mais les déplacements des nœuds sont quasi identiques;
- des contraintes parasites de flexion se produisent et peuvent être importantes dans certains cas.

4. CALCUL DU DEGRÉ D'HYPERSTATICITÉ D'UN TREILLIS

La procédure décrite dans le chapitre 3 est applicable aux treillis. Il est cependant possible de la simplifier pour l'adapter à ceux-ci. Soit b le nombre total de barres, r le nombre de réactions d'appui et n le nombre total de nœuds.

Par nœud rotulé, on peut établir 2 équations (équilibre vertical et équilibre horizontal), ce qui procure un total de $2n$ équations. Par ailleurs, les inconnues sont les b efforts normaux relatifs à chaque barre ainsi que les r réactions d'appui. Le degré d'hyperstaticité vaut donc :

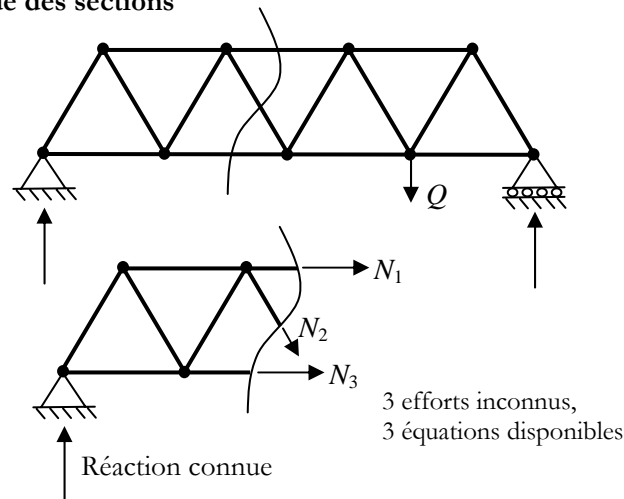
$$I_{s,\text{treillis}} = (b + r) - (2n)$$

5. RÉOLUTION DES TREILLIS ISOSTATIQUES

Il existe plusieurs méthodes de résolution des treillis isostatiques, parmi lesquelles :

- la méthode des sections (ou méthode de Ritter (Allemagne, 1779-1859)), dont le principe consiste à isoler des morceaux de structure judicieusement choisis et à écrire leurs équations d'équilibre;
- la méthode graphique de Cremona;
- la méthode générale exprimant l'équilibre de tous les nœuds selon une formulation analytique;
- la méthode des déplacements, uniquement utilisable par ordinateur, et qui est décrite dans le chapitre 14.

► La méthode des sections



La méthode des sections consiste à effectuer une découpe imaginaire qui sépare la structure en deux parties distinctes, de telle façon que l'une des deux parties au moins soit caractérisée par un maximum de trois efforts inconnus. En d'autres termes, la section ne peut pas couper plus de trois barres. Il suffit alors d'écrire les équations d'équilibre de l'une des deux parties pour déterminer les efforts inconnus. Si la partie de structure dont on effectue l'équilibre contient des appuis, il faudra au préalable avoir calculé les réactions correspondantes.

On peut ensuite répéter cette démarche autant de fois que nécessaire en effectuant d'autres sections.

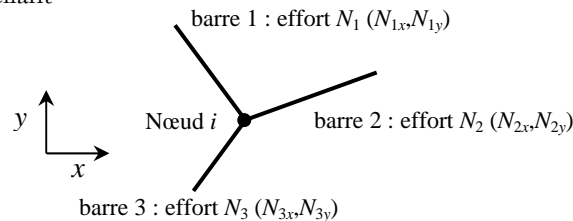
► La méthode graphique de Cremona

Il s'agit ici de tracer le polygone des forces pour chaque nœud, l'un après l'autre. Cette méthode n'est pas applicable *en un nœud* si plus de deux efforts y sont inconnus. Pour plus d'informations sur la méthode de Cremona, on se reportera à l'exemple 1 de ce chapitre (§9) ainsi qu'au chapitre 1 (§8.4).

► La méthode générale exprimant l'équilibre de tous les nœuds

Cette méthode n'est pas vraiment intéressante lors d'un calcul manuel car elle nécessite la résolution d'un système dont le nombre d'équations devient vite important (2 équations par nœud). De plus, lors d'un calcul par ordinateur, on lui préférera la méthode des déplacements (voir chapitre 14), nettement plus systématique et applicable également aux treillis hyperstatiques. Cette méthode est donc d'un intérêt limité.

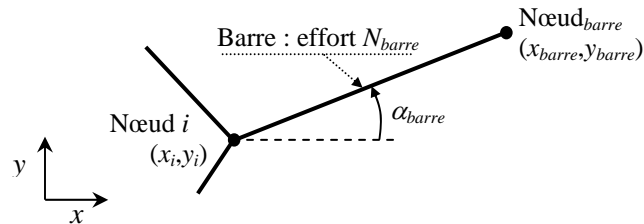
Soit un nœud d'indice i reliant plusieurs barres :



Pour que ce nœud soit à l'équilibre, il faut que :

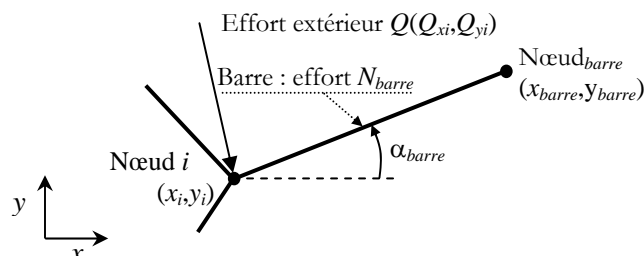
- la somme des composantes **horizontales** N_{ix} des efforts N_i exercés sur ce nœud soit nulle;
- la somme des composantes **verticales** N_{iy} des efforts N_i exercés sur ce nœud soit nulle.

Si α_{barre} est l'angle que fait une barre concourante au nœud i avec l'horizontale, les deux conditions précédentes s'expriment sous la forme suivante :



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{barre} \cos \alpha_{barre} = 0 \\ \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{barre} \sin \alpha_{barre} = 0 \end{array} \right.$$

Si on exprime chaque angle α en fonction des coordonnées (x_i, y_i) du nœud i et (x_{barre}, y_{barre}) de l'autre nœud de la barre correspondante et que l'on rajoute les composantes connues (Q_{xi}, Q_{yi}) d'un effort extérieur éventuel exercé au nœud i , les équations ci-dessus deviennent :



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{x,i} + \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{barre} \frac{x_{barre} - x_i}{L_{barre}} = 0 \\ Q_{y,i} + \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{barre} \frac{y_{barre} - y_i}{L_{barre}} = 0 \end{array} \right.$$

Si on écrit ces 2 équations pour chaque nœud, on obtient un système dont la dimension est égale au double du nombre total de nœuds du treillis. Remar-

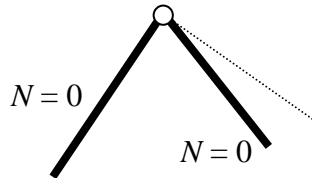
quons que si le nœud correspond à un appui, les équations ci-dessus doivent être complétées par les composantes $(R_{x,i}, R_{y,i})$ de la réaction correspondante :

$$\begin{cases} R_{x,i} + Q_{x,i} + \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{x_{\text{barre}} - x_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \\ R_{y,i} + Q_{y,i} + \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{y_{\text{barre}} - y_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \end{cases}$$

6. BARRES À EFFORT NUL

Avant toute résolution d'un treillis, il est utile de vérifier si certaines barres correspondent à un effort nul :

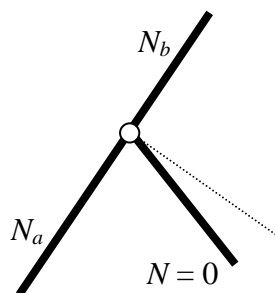
- si deux barres concourent en un nœud non chargé, l'effort normal est nul dans ces barres :



En effet, considérons par exemple la barre de droite et raisonnons par l'absurde en supposant qu'elle est le siège d'un effort normal. Si c'est le cas, cet effort possède une composante perpendiculaire à la barre de gauche (selon la ligne en pointillés). Or, comme le nœud n'est pas chargé, cette composante n'est équilibrée par aucune force. L'effort correspondant est donc forcément nul.

- l'effort relatif à une barre joignant, en un nœud non chargé, deux autres barres alignées, est le siège d'un effort nul. De plus $N_a = N_b$:

Cette propriété s'explique de la même façon que dans le cas précédent.



7. RÉOLUTION DES TREILLIS HYPERSTATIQUES

La résolution d'un treillis hyperstatique se fera sans difficulté particulière par la méthode des forces décrite au chapitre 3. Les coupures s'effectueront sur certaines barres par extériorisation de l'effort normal qui y règne, pris comme inconnue hyperstatique (on coupera un nombre de barres égal au degré d'hyperstaticité). Par ailleurs, le calcul des déplacements $\delta_{ij}, \delta_{i,\Sigma F}$ selon le théorème de la force unité (chap. 1, §9) sera simplifié comme indiqué au §2 (voir aussi exemples 1 et 2 du §9).

Notons que les treillis hyperstatiques peuvent aussi être résolus par la méthode des déplacements décrite au chapitre 14.

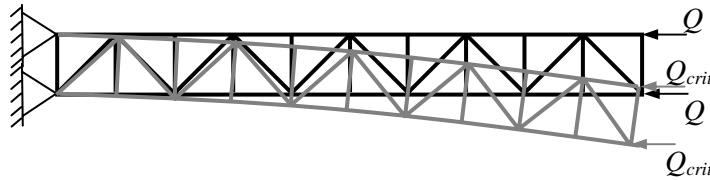


Passerelle composée de deux treillis métalliques tridimensionnels à mailles pyramidales, reliant les quartiers de Lauzelle et de l'Hocaille à Louvain-la-Neuve, Belgique (conception : arch. Le Paige). Les membrures supérieures sont reliées par des éléments secondaires qui supportent le tablier d'une part (la photo a été prise avant la pose de celui-ci) et qui limitent les risques d'instabilité d'ensemble d'autre part. (Photo de l'auteur)

8. LE FLAMBEMENT DES TREILLIS

Les treillis, composés d'éléments tendus et comprimés, peuvent faire l'objet de plusieurs types d'instabilité :

- un flambement local des barres comprimées, se produisant selon une longueur de flambement qui est en général égale à la longueur de la barre (parfois moins si les nœuds sont rigides, selon le type d'assemblage et selon que la barre appartient à une membrure, un montant ou une diagonale : on peut aller jusqu'à un facteur 0,9 ou même 0,8 - consulter les normes en vigueur pour plus d'information à ce sujet).
- un flambement global dans le plan du treillis, à la manière d'une colonne comprimée :



Ce type d'instabilité peut se traiter par certains logiciels via une approche numérique (voir chapitre 1, §14). Cette approche fournira d'une part la forme de flambement global associée à la charge extérieure appliquée et d'autre part le coefficient critique qui exprime la valeur par laquelle il faut multiplier cette charge pour que ce mode d'instabilité se produise (ce coefficient est donc égal à Q_{crit}/Q , et doit en principe être supérieur à 1).

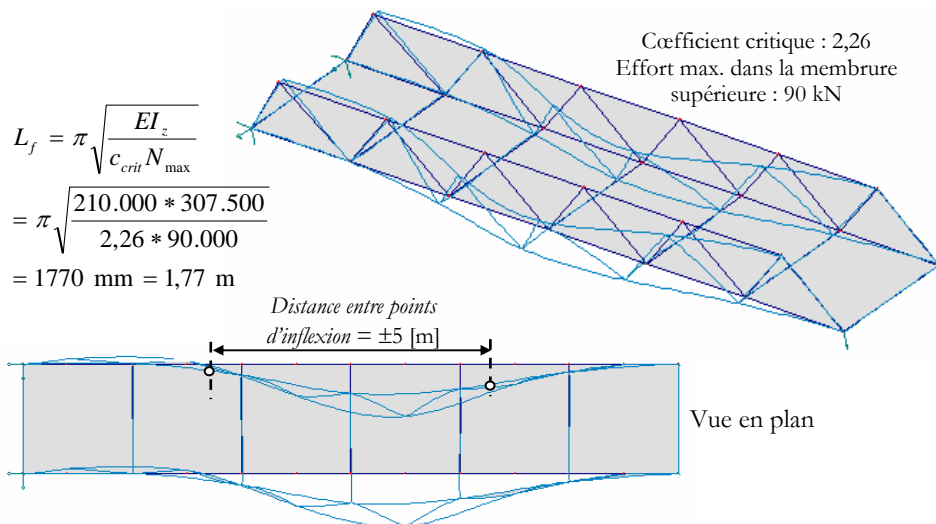
- un flambement global transversal, ou déversement, provoqué par une instabilité transversale d'une membrure comprimée impliquant plusieurs barres et entraînant avec elle le reste du treillis. Ce phénomène peut se produire quand la membrure comprimée n'est pas contreventée latéralement. Chaque élément de celle-ci possède alors une longueur de flambement transversale plus grande ou plus petite que sa longueur individuelle. Une approche numérique est rendue possible par certains logiciels qui fournissent la forme de flambement associée à un coefficient critique c_{crit} (voir chap. 1, §14). Ce coefficient critique représente la valeur par laquelle il faut multiplier les charges appliquées pour que le flambement se produise. Ainsi, si N_{max} est l'effort dans l'élément de membrure le plus sollicité, l'effort critique de flambement vaut : $c_{crit} * N_{max}$ et on peut retrouver sa longueur de flambement réelle à partir de la loi d'Euler (voir chap. 1, §11) :

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{L_f^2} \Rightarrow L_f = \pi \sqrt{\frac{EI_z}{c_{crit} N_{max}}}$$

Il est important de faire remarquer que cette longueur de flambement ne correspond pas nécessairement à la longueur entre deux points d'inflexion que l'on obtiendrait à partir d'une inspection visuelle de la forme de flambement. En effet, l'assimilation de la longueur de flambement à la longueur entre points d'inflexion de la déformée n'est valable que pour une barre sans appuis intermédiaires, alors que dans le cas présent la membrure est assimilable à une poutre sur appuis élastiques.

Notons que, dans de nombreux cas, le flambement global peut être empêché par des dispositifs de construction. C'est le cas lorsque la présence d'une toiture ou d'un tablier stabilise le treillis, ou que des éléments secondaires relient les nœuds de treillis voisins (voir photo en page 198).

Les figures suivantes illustrent le premier mode de flambement global d'une passerelle composée de deux treillis reliés au niveau de la membrure inférieure mais dont les membrures supérieures ne sont pas contreventées. Ce mode de flambement est transversal. Ces treillis à nœuds rigides, d'une portée de 12 [m] et d'une hauteur de 1 [m], comportent 6 mailles et sont soumis en chaque nœud de la membrure inférieure à des efforts de 10 [kN]. Les sections sont toutes carrées creuses (côté 50 [mm], épaisseur 5 [mm]) :



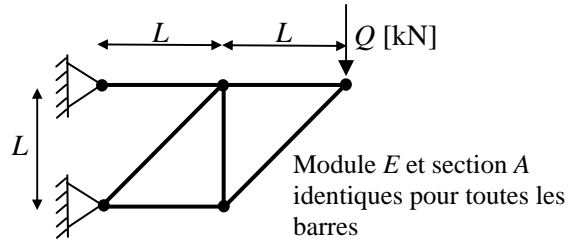
Premier mode de flambement d'une passerelle composée de deux treillis parallèles dont les membrures supérieures ne sont pas contreventées. A vue d'œil, la distance entre deux points d'inflexion successifs de la membrure supérieure vaut 5 [m], alors que la longueur de flambement réelle vaut 1,77 m. C'est sur cette valeur de 1,77 m et sur base d'un effort de compression de 90 kN que la membrure devra être vérifiée. Les autres modes de flambement sont en toute rigueur aussi à examiner avec soin. (*Simulation sur le logiciel ROBOT Millennium*).

9. EXEMPLES

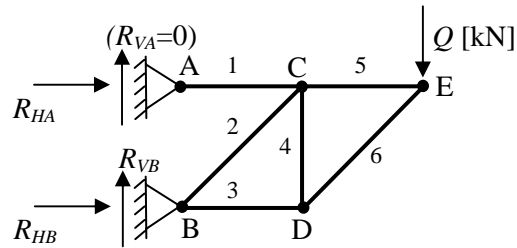
Exemple 1

Pour le treillis isostatique ci-dessous, on propose :

- de calculer les réactions d'appui;
- de déterminer les efforts dans chacune des barres par les trois méthodes (méthode de Cremona, méthode des sections, méthode générale).
- de calculer l'expression de la flèche verticale au point d'application de Q ;



►► Calcul des réactions d'appui



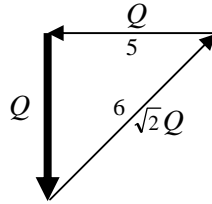
Soit N_1 à N_6 les efforts normaux relatifs aux barres 1 à 6. Remarquons que la réaction R_{VA} est forcément nulle puisqu'elle ne peut être équilibrée par aucun autre effort vertical. En effet, R_{HA} et N_1 agissent uniquement selon un axe horizontal.

- équilibre des efforts verticaux : $R_{VB} = Q$
- équilibre des efforts horizontaux : $R_{HA} + R_{HB} = 0$
- équilibre des moments par rapport au point A : $R_{HB}L - Q \cdot 2L = 0$

On obtient : $R_{VB} = Q$, $R_{HB} = 2Q$, $R_{HA} = -2Q$, $(R_{VA} = 0)$.

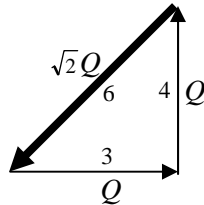
► Calcul des efforts dans les barres par la méthode de Cremona

nœud E :



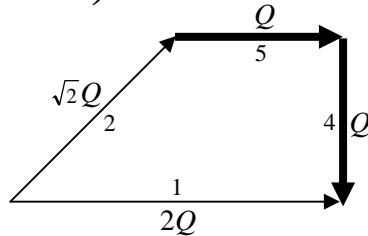
$$\begin{cases} N_5 = Q & \text{(traction)} \\ N_6 = -\sqrt{2}Q & \text{(compression)} \end{cases}$$

nœud D (N_6 connu) :



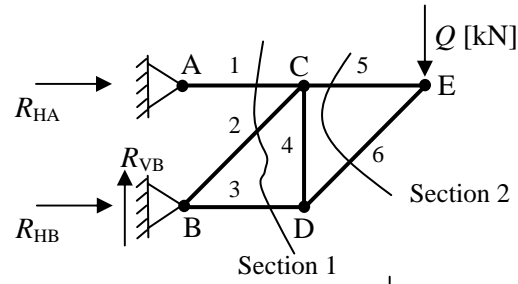
$$\begin{cases} N_3 = -Q & \text{(compression)} \\ N_4 = Q & \text{(traction)} \end{cases}$$

nœud C (N_4 et N_5 connus) :

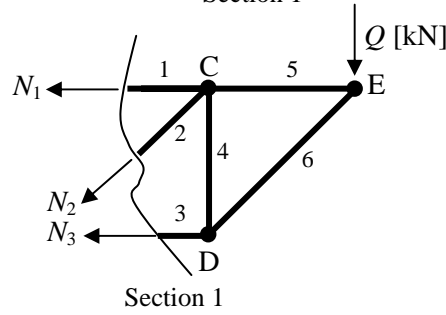


$$\begin{cases} N_1 = 2Q & \text{(traction)} \\ N_2 = -\sqrt{2}Q & \text{(compression)} \end{cases}$$

► Calcul des efforts dans les barres par la méthode des sections



Section 1 :

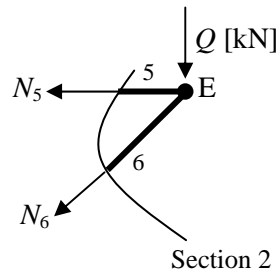


- équilibre des efforts verticaux : $N_2 \cos 45^\circ + Q = 0$
- équilibre des efforts horizontaux : $N_1 + N_2 \cos 45^\circ + N_3 = 0$
- équilibre des couples autour du point C : $N_3 L + QL = 0$

Sachant que $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} N_1 = 2Q & \text{(traction)} \\ N_2 = -\sqrt{2}Q & \text{(compression)} \\ N_3 = -Q & \text{(compression)} \end{cases}$$

Section 2 :



- équilibre des efforts verticaux : $N_6 \cos 45^\circ + Q = 0$
- équilibre des efforts horizontaux : $N_5 + N_6 \cos 45^\circ = 0$

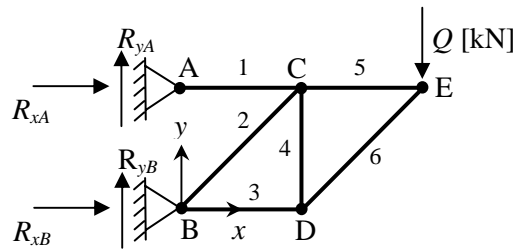
On obtient : $N_5 = Q$ (traction) $N_6 = -\sqrt{2}Q$ (compression)

Le calcul de N_4 est immédiat si on effectue une section dans les barres 3, 4 et 5 : on obtient directement $N_4 =$ charge extérieure Q (traction).

► Calcul des efforts dans les barres par la méthode générale

Il faut considérer chaque nœud et écrire les équations d'équilibre qui lui sont relatives :

$$\begin{cases} R_{x,i} + Q_{x,i} + \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{x_{\text{barre}} - x_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \\ R_{y,i} + Q_{y,i} + \sum_{\substack{\text{barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{y_{\text{barre}} - y_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \end{cases}$$



Nœud A :

- coordonnées du nœud A : $(0, L)$
- barre concourante en A : **Barre 1** : nœud opposé (L, L) , longueur L
- effort extérieur appliqué : aucun
- présence d'un appui (R_{xA}, R_{yA})

$$\begin{cases} R_{xA} + 0 + N_1 \left(\frac{L-0}{L} \right) = 0 \\ R_{yA} + 0 + N_1 \left(\frac{L-L}{L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{xA} + N_1 = 0 \\ R_{yA} = 0 \end{cases}$$

Nœud B :

- coordonnées du nœud B : $(0, 0)$
- barres concourantes en B : **Barre 2** : nœud opposé (L, L) , longueur $\sqrt{2}L$
Barre 3 : nœud opposé $(L, 0)$, longueur L
- effort extérieur appliqué : aucun
- présence d'un appui (R_{xB}, R_{yB})

$$\begin{cases} R_{xB} + 0 + N_2 \left(\frac{L-0}{\sqrt{2}L} \right) + N_3 \left(\frac{L-0}{L} \right) = 0 \\ R_{yB} + 0 + N_2 \left(\frac{L-0}{\sqrt{2}L} \right) + N_3 \left(\frac{0-0}{L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{xB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 \\ R_{yB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Nœud C :

- coordonnées du nœud C : (L, L)
- barres concourantes en C : **Barre 1** : nœud opposé $(0, L)$, longueur L
Barre 2 : nœud opposé $(0, 0)$, longueur $\sqrt{2}L$
Barre 4 : nœud opposé $(L, 0)$, longueur L
Barre 5 : nœud opposé $(2L, L)$, longueur L
- effort extérieur appliqué : aucun
- pas d'appui

$$\begin{cases} 0 + 0 + N_1 \left(\frac{0-L}{L} \right) + N_2 \left(\frac{0-L}{\sqrt{2}L} \right) + N_4 \left(\frac{L-L}{L} \right) + N_5 \left(\frac{2L-L}{L} \right) = 0 \\ 0 + 0 + N_1 \left(\frac{L-L}{L} \right) + N_2 \left(\frac{0-L}{\sqrt{2}L} \right) + N_4 \left(\frac{0-L}{L} \right) + N_5 \left(\frac{L-L}{L} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_5 = 0 \\ -\frac{N_2}{\sqrt{2}} - N_4 = 0 \end{cases}$$

Nœud D :

- coordonnées du nœud D : $(L, 0)$
- barres concourantes en D : **Barre 3** : nœud opposé $(0, 0)$, longueur L
Barre 4 : nœud opposé (L, L) , longueur L
Barre 6 : nœud opposé $(2L, L)$, longueur $\sqrt{2}L$
- effort extérieur appliqué : aucun
- pas d'appui

$$\begin{cases} 0 + 0 + N_3 \left(\frac{0-L}{L} \right) + N_4 \left(\frac{L-L}{L} \right) + N_6 \left(\frac{2L-L}{\sqrt{2}L} \right) = 0 \\ 0 + 0 + N_3 \left(\frac{0-0}{L} \right) + N_4 \left(\frac{L-0}{L} \right) + N_6 \left(\frac{L-0}{\sqrt{2}L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -N_3 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ N_4 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Nœud E :

- coordonnées du nœud E : $(2L, L)$
- barres concourantes en E : **Barre 5** : nœud opposé (L, L) , longueur L
Barre 6 : nœud opposé $(L, 0)$, longueur $\sqrt{2}L$
- effort extérieur appliqué : $(Q_x, Q_y) = (0, -Q)$
- pas d'appui

$$\begin{cases} 0 + 0 + N_5 \left(\frac{L-2L}{L} \right) + N_6 \left(\frac{L-2L}{\sqrt{2}L} \right) = 0 \\ 0 - Q + N_5 \left(\frac{L-L}{L} \right) + N_6 \left(\frac{0-L}{\sqrt{2}L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -N_5 - \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ Q + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient un système de dix équations dans lequel les dix inconnues sont N_1 à N_6 et R_{xA} , R_{yA} , R_{xB} , R_{yB} :

$$\begin{array}{lll} R_{xA} + N_1 = 0 & -N_1 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_5 = 0 & N_4 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{yA} = 0 & & \\ R_{xB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 & -\frac{N_2}{\sqrt{2}} - N_4 = 0 & -N_5 - \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{yB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 & -N_3 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 & Q + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \end{array}$$

Ces dix équations peuvent être exprimées sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ R_{xA} \\ R_{yA} \\ R_{xB} \\ R_{yB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système fournit les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 2Q \\ N_2 = -\sqrt{2}Q \\ N_3 = -Q \\ N_4 = Q \\ N_5 = Q \\ N_6 = -\sqrt{2}Q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{xA} = -2Q \\ R_{yA} = 0 \\ R_{xB} = 2Q \\ R_{yB} = Q \end{array} \right.$$

➔ **Calcul de la flèche en E**

Puisqu'on recherche précisément le déplacement au point d'application E de la charge Q , le théorème de la force unité (chap. 1, §9) peut s'utiliser en considérant la structure soumise à un effort de 1 [kN] à la place de l'effort Q et on a :

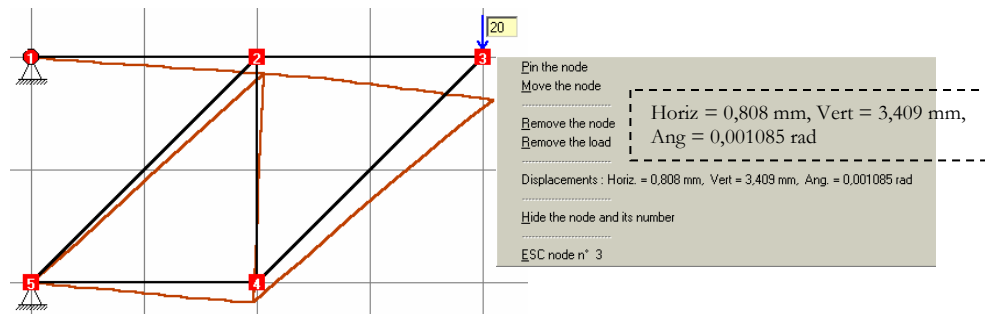
$$\delta_E = \sum_{i=1}^{\text{Nbre de barres}} \frac{N_i n_i}{E_i A_i} L_i = \sum_{i=1}^{\text{Nbre de barres}} \frac{N_i \left(\frac{N_i}{Q} \right)}{E_i A_i} L_i$$

On obtient :

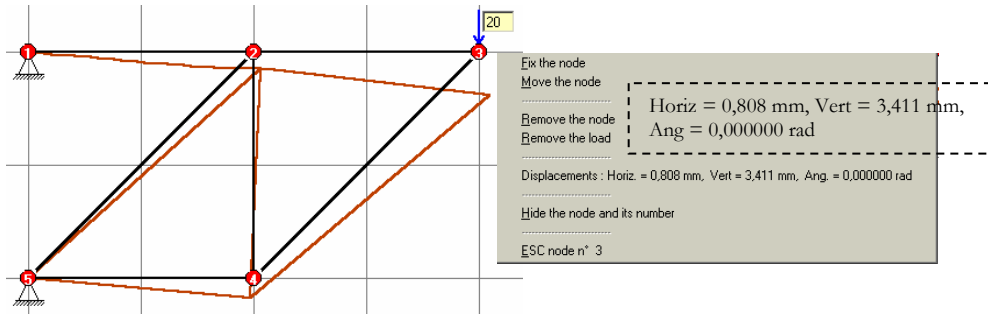
$$\delta_E = \frac{1}{EA} \left(2Q * 2L + \sqrt{2}Q * \sqrt{2} * \sqrt{2}L + Q * 1 * L + Q * 1 * L + Q * 1 * L + \sqrt{2}Q * \sqrt{2} * \sqrt{2}L \right) = 12,657 \frac{QL}{EA}$$

Les figures ci-dessous montrent les résultats obtenus à l'aide du logiciel ISSD pour les données suivantes : $L = 2$ [m], $Q = 20$ [kN], sections tubulaires identiques (diamètre 50 [mm], épaisseur 5 [mm] : aire 706,86 [mm²]), $E = 210.000$ [MPa] :

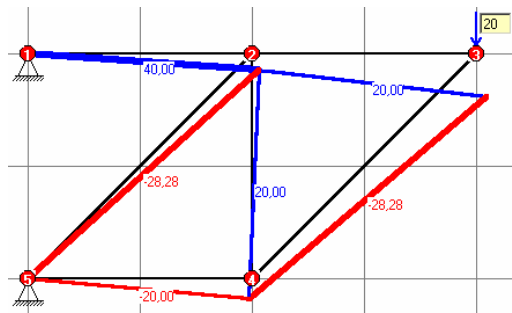
Déformée (et déplacement en E) avec nœuds rigides :



Déformée (et déplacement en E) avec nœuds articulés :



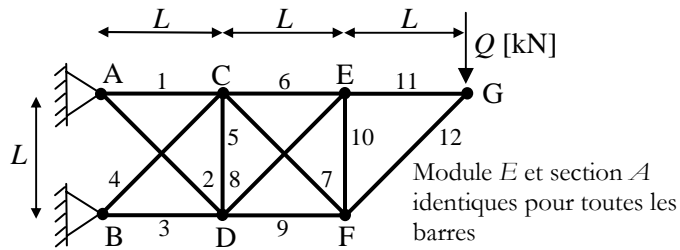
Déformée et valeur des efforts normaux avec nœuds articulés :



Exemple 2

Pour le treillis hyperstatique suivant, on propose :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres;
- de calculer l'expression de la flèche verticale en F .

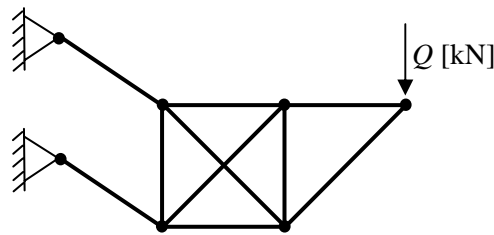


➔ **Détermination du degré d'hyperstaticité**

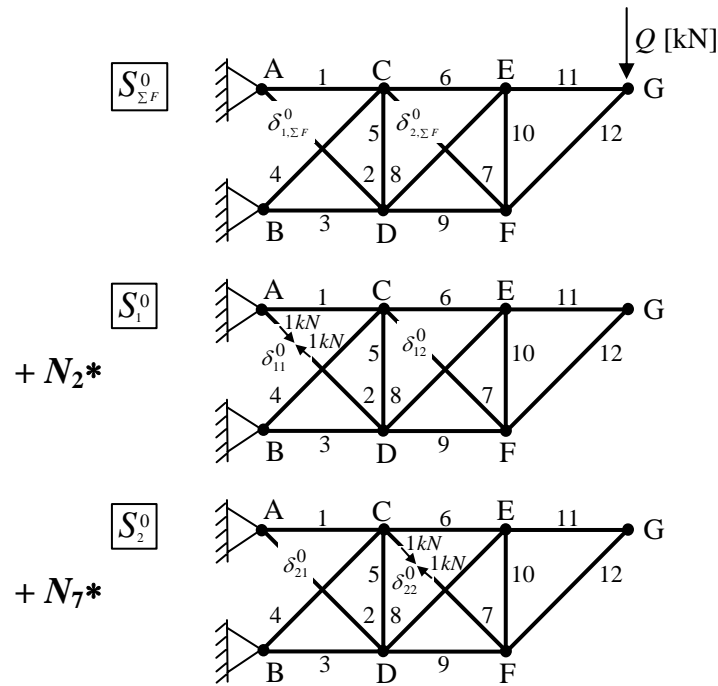
$$I_s = (b+r) - (2n) = 12 + 4 - 14 = 2$$

➔ **Levée d'hyperstaticité**

Le degré d'hyperstaticité valant 2, on peut choisir la structure isostatique de référence en extériorisant deux efforts, et donc en coupant deux barres. On veillera à ne pas créer une structure isostatique de type mécanisme, comme c'est le cas si on effectue une coupure dans les barres 2 et 4 :



Le choix des barres 2 et 7 semble plus judicieux. N_2 et N_7 étant les efforts correspondants, le treillis hyperstatique de base peut se décomposer en une superposition des trois structures isostatiques suivantes :



► Résolution des structures isostatiques

Le calcul pourra se faire par une méthode quelconque, par exemple par la méthode des sections. Le tableau ci-dessous reprend la valeur des efforts normaux dans les barres pour chacune des structures isostatiques.

N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_1^0	Effort normal n_2^0
1	L	$3Q$	$-1/\sqrt{2}$	0
2	$\sqrt{2}L$	0	1	0
3	L	$-2Q$	$-1/\sqrt{2}$	0
4	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}Q$	1	0
5	L	Q	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
6	L	$2Q$	0	$-1/\sqrt{2}$
7	$\sqrt{2}L$	0	0	1
8	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}Q$	0	1
9	L	$-Q$	0	$-1/\sqrt{2}$
10	L	Q	0	$-1/\sqrt{2}$
11	L	Q	0	0
12	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}Q$	0	0

►► Calcul des déplacements

$$\begin{aligned} \delta_{1,\Sigma F}^0 &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{N_{\Sigma F,i}^0 n_{1,i}^0}{EA} L_i \right) = -(2+\sqrt{2}) \frac{QL}{EA} & \delta_{22}^0 &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{(n_{2,i}^0)^2}{EA} L_i \right) = 2(1+\sqrt{2}) \frac{L}{EA} \\ \delta_{2,\Sigma F}^0 &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{N_{\Sigma F,i}^0 n_{2,i}^0}{EA} L_i \right) = -(2+\sqrt{2}+1/\sqrt{2}) \frac{QL}{EA} & \delta_{12}^0 &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{n_{1,i}^0 n_{2,i}^0}{EA} L_i \right) = \frac{1}{2} \frac{L}{EA} \\ \delta_{11}^0 &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{(n_{1,i}^0)^2}{EA} L_i \right) = (3/2+2\sqrt{2}) \frac{L}{EA} & \delta_{21}^0 &= \delta_{12}^0 \end{aligned}$$

►► Résolution du système d'inconnues

$$\begin{pmatrix} \delta_{11}^0 & \delta_{12}^0 \\ \delta_{21}^0 & \delta_{22}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 \\ N_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1,\Sigma F}^0 \\ \delta_{2,\Sigma F}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_2 = 0,6985Q \\ N_7 = 0,7812Q \end{matrix}}$$

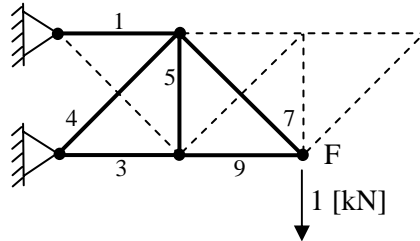
►► Calcul des efforts dans les barres de la structure hyperstatique

N_2 et N_7 étant connus, il suffit d'additionner les efforts relatifs à chacune des structures isostatiques en tenant compte des signes (convention $N > 0$ en traction) et en introduisant la pondération par N_2 et N_7 :

N° de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_1^0	Effort normal n_2^0	Effort normal total $N_{\Sigma F}^0 + N_2 n_1^0 + N_7 n_2^0$
1	$3Q$	$-1/\sqrt{2}$	0	$2,5061Q$
2	0	1	0	$0,6985Q$
3	$-2Q$	$-1/\sqrt{2}$	0	$-2,4939Q$
4	$-\sqrt{2}Q$	1	0	$-0,7157Q$
5	Q	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-0,0465Q$
6	$2Q$	0	$-1/\sqrt{2}$	$1,4476Q$
7	0	0	1	$0,7812Q$
8	$-\sqrt{2}Q$	0	1	$-0,6330Q$
9	$-Q$	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1,5524Q$
10	Q	0	$-1/\sqrt{2}$	$0,4476Q$
11	Q	0	0	Q
12	$-\sqrt{2}Q$	0	0	$-1,4142Q$

► **Calcul de la flèche verticale au nœud F**

Le théorème de Pasternak (chap.3, §6) permet d'appliquer le théorème de la force unité (chap.1, §9) en considérant n'importe quelle structure isostatique soumise à effort unitaire. Ainsi, le choix ci-dessous est particulièrement intéressant car il ne nécessite le calcul que de 4 efforts puisque N_5 est nul à priori (voir §6) et que $N_3=N_9$:



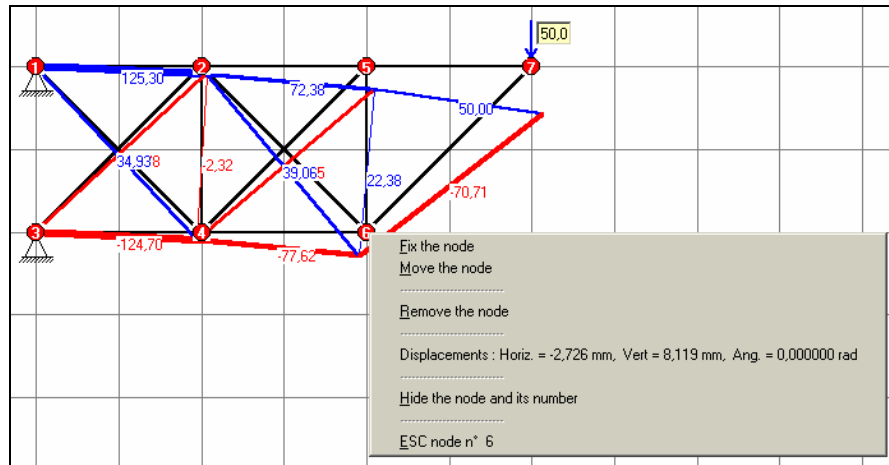
La résolution de ce treillis ne soulève pas de problème particulier. On obtient :

$n_1 = 2$ [kN]; $n_2 = 0$ [kN]; $n_3 = -1$ [kN]; $n_4 = -1,414$ [kN]; $n_5 = 0$ [kN]; $n_6 = 0$ [kN]; $n_7 = 1,414$ [kN]; $n_8 = 0$ [kN]; $n_9 = -1$ [kN]; $n_{10} = n_{11} = n_{12} = 0$;

N° de la barre	Longueur de la barre L_i	Effort normal dans la structure hyperstatique de base $N_{\Sigma F}^{(2)}$	Effort normal dans la structure soumise à effort unitaire n_1^0	$N_{\Sigma F}^{(2)} n_1^0 L_i$
1	L	$2,5061Q$	2	$5,0122QL$
2	$\sqrt{2}L$	$0,6985Q$	0	0
3	L	$-2,4939Q$	-1	$2,4939QL$
4	$\sqrt{2}L$	$-0,7157Q$	-1,4142	$1,4314QL$
5	L	$-0,0464Q$	0	0
6	L	$1,4476Q$	0	0
7	$\sqrt{2}L$	$0,7812Q$	1,4142	$1,5624QL$
8	$\sqrt{2}L$	$-0,6330Q$	0	0
9	L	$-1,5524Q$	-1	$1,5524QL$
10	L	$0,4476Q$	0	0
11	L	Q	0	0
12	$\sqrt{2}L$	$-1,4142Q$	0	0

La somme des termes de la dernière colonne vaut $12,0523QL$ et la flèche en F vaut donc : $\delta_F = 12,0523QL/EA$

La figure ci-dessous indique la déformée, la valeur des efforts normaux, ainsi que la flèche verticale en F, obtenus à partir du logiciel ISSD, avec les données suivantes : $L = 2$ [m], $Q = 50$ [kN], sections tubulaires (diamètre 50 [mm], épaisseur 5 [mm] : aire 706,86 [mm²]), $E = 210.000$ [MPa].



Passerelle composée de deux treillis métalliques parallèles sur le Rhône en France : les nœuds sont rigides et très ramassés. (Photo de l'auteur)

